MATICE – ELEMENTÁRNÍ ÚPRAVY

Schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} \odot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

pod nejlevějším nenulovým prvkem na řádku jsou jen nuly.
pod nulovým řádkem jsou jen nulové řádky.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordanův tvar

- $\underbrace{\text{nejlevější nenulový prvek}}_{\text{hlavní prvek}}$ na každém řádku je 1
- pod i nad hlavním prvkem jsou jen 0.

Převod matice na G-J tvar

Př.:
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ALGEBRAICKÉ VLASTNOSTI MATIC

$c \in P$, $A = (a_{ij})$

- c-násobek matice A je matice $cA = (ca_{ij})$
- sčítání matic - matice stejného typu
  A, B matice typu $m \times n$
  součet matic A, B je matice $C = A + B$ typu $m \times n$
  a $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- opačná matice k matici A je $-A$ a $A + (-A) = 0$.

Tvrzení A, B, C matice nad polem P. $c, k \in P$

1) $A + B = B + A$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) $A + 0 = A$
4) $A + (-A) = 0$
5) $1A = A$
6) $c(A + B) = cA + cB$
7) $(c + k)A = cA + kA$
8) $c(kA) = (ck)A$

násobení matic

A typu $k \times l$, B typu $l \times m$

$C = A \cdot B$ je matice typu $k \times m$ a

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{il} b_{lj} = \sum_{n=1}^{l} a_{in} b_{nj}$$

Př.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tvrzení 1) $A(B\cdot C) = (AB)C$

2) $AE = EA = A$

3) $A(B+C) = AB + AC$

4) $(A+B)C = AC + BC$

Důkaz. DÚ

INVERZNÍ MATICE

A, B typu $n \times n$

Matice B je inverzní k matici A, když $A\cdot B = B\cdot A = E$.

Inverzní matici značíme A^{-1}.

Matice, ke které existuje inverzní, se nazývá invertibilní.

Tvrzení K A existuje nejvýše 1 inverzní matice.

Důkaz Předpokládejme, že B, C jsou inverzní k A.

$\Rightarrow A\cdot B = B\cdot A = E,\ A\cdot C = C\cdot A = E.$

$$B = E\cdot B = (C\cdot A)\cdot B = C\cdot(A\cdot B) = C\cdot E = C.$$

Tvrzení Nechť A, B jsou invertibilní matice takové, že $A\cdot B = E$. Potom $A = B^{-1}$ a $B = A^{-1}$.

Důkaz $B = EB = (A^{-1}\cdot A)\cdot B = A^{-1}\cdot(A\cdot B) = A^{-1}\cdot E = A^{-1}$.

Tvrzení A, B invertibilní matice.

1) AB je invertibilní a $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

2) A^{-1} je invertibilní a $(A^{-1})^{-1} = A$.

Důkaz 1) $E = A\cdot B\cdot B^{-1}\cdot A^{-1} \Rightarrow (A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

2) DÚ.

$(A\,|\,E)$ typu $n \times 2n$